

УДК 519.9:537.6

**РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА ТОНКОЙ  
НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ И ШАРЕ****Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич, А.И. Куц***Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь***SCATTERING OF THE ELECTRIC DIPOLE FIELD ON THE THIN  
UNCLOSED SPHERICAL SHELL AND BALL****G.Ch. Shushkevich, S.V. Shushkevich, A.I. Kuts***Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus*

Построено аналитическое решение граничной задачи, описывающей процесс рассеивания на проницаемом шаре поля электрического диполя, расположенного внутри идеально проводящей бесконечно тонкой незамкнутой сферической оболочки. Для некоторых параметров задачи построена диаграмма направленности электрического поля.

**Ключевые слова:** электрический диполь, парные сумматорные уравнения, бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором, диаграмма направленности.

The analytical solution of the boundary problem, describing the scattering of the electric dipole field, located inside perfectly conducting thin unclosed spherical shell and on a permeable ball. For some parameters of the problem directivity pattern of the electric field is constructed.

**Keywords:** electric dipole, dual series equations, infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator, directional diagram of the electric field.

**Введение**

Задачи рассеяния электромагнитных волн на различных объектах были рассмотрены в работах [1]–[7]. В работе [8] построено строгое решение задачи дифракции поля электрического диполя на двух идеально проводящих сферах, когда момент диполя параллелен общей для сфер оси вращения. Рассеяние плоской монохроматической электромагнитной волны на двух непересекающихся сверхпроводящих сферических оболочках шаровых слоев рассмотрено в [9]. В этих работах сформулирована векторная задача. В работе [10] рассмотрена задача рассеяния поля турникетной антенной идеально на двух проводящих сферах, проведены расчеты диаграммы направленности. Используя потенциалы Дебая, решена задача дифракции электромагнитного поля на нескольких соосных сферах [11]. В [12] показано, что задача рассеяния волн на сфере с круговым отверстием сводится к решению двух скалярных краевых задач для потенциалов Дебая, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца, граничному условию на незамкнутой оболочке, условию на ребре и условию на бесконечности. Решение задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем тонком сферическом экране с круговым отверстием сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным оператором [13], [14]. Решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сферической оболочке с круговой щелью в приближении

Рэлея при падении волны перпендикулярно плоскости щели рассмотрено в [15].

В данной работе построено точное осесимметричное решение задачи о рассеянии на проницаемом шаре поля электрического диполя, расположенного внутри идеально проводящей бесконечно тонкой незамкнутой сферической оболочки. Используя соответствующие теоремы сложения для векторных сферических волновых функций, решение поставленной векторной краевой задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по присоединенным функциям Лежандра первого рода, которые преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на диаграмму направленности электрического поля.

**1 Постановка и представление решения задачи**

Пусть пространство  $R^3$  разделено сферой  $S(r_1 = a_1)$  с центром в точке  $O_1$  на две области  $D_0(r_1 > a_1)$ ,  $D_1(0 \leq r_1 < a_1)$  (рисунок 1.1). В области  $D_0$  находится идеально проводящая бесконечно тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$ , расположенная на сфере  $\Gamma$  радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . Область пространства, ограниченную сферой  $\Gamma$ , обозначим через  $D_0^{(0)}(0 \leq r < a)$  и

$D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$ . Расстояние между точками  $O$  и  $O_1$  обозначим через  $h$ .

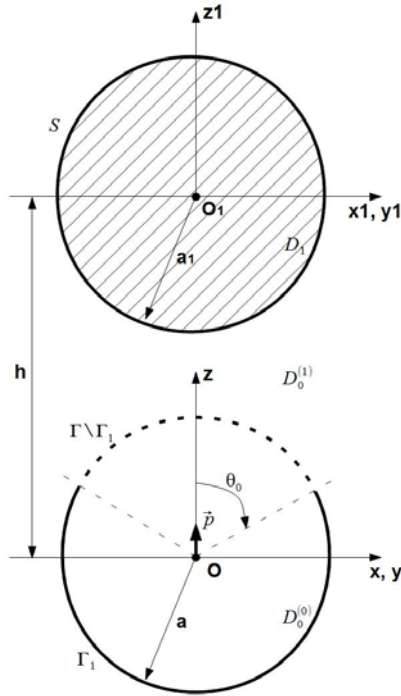


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

В точке  $O$  расположен ориентированный вдоль оси  $Oz$  электрический диполь Герца, колеблющийся с круговой частотой  $\omega$ . Области  $D_j$ ,  $j = 0, 1$ , заполнены средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_j$ , магнитной проницаемостью  $\mu_j$ .

Будем полагать, что на поверхности  $S$  отсутствуют поверхностные токи и заряды.

Для решения задачи свяжем с точками  $O$  и  $O_1$  сферические координаты. Тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $\Gamma_1$  и сферическая оболочка  $S$  описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, \theta_0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$S = \{r_1 = a_1, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через  $\vec{E}_e$ ,  $\vec{H}_e$  вектора напряженности электрического и магнитного поля диполя соответственно.

В результате взаимодействия электромагнитного поля  $\vec{E}_e$ ,  $\vec{H}_e$  диполя с проницаемым шаром и незамкнутой сферической оболочкой  $\Gamma_1$  образуются вторичные поля.

Пусть  $\vec{E}_0^0$ ,  $\vec{H}_0^0$  – вторичное поле, отраженное от границы  $\Gamma_1$  в области  $D_0^{(0)}$ ,  $\vec{E}_1^0$ ,  $\vec{H}_1^0$  – вторичное поле в области  $D_1$ ,  $\vec{E}_0 = \vec{E}_1^0 + \vec{E}_1^1$ ,  $\vec{H}_0 = \vec{H}_1^0 + \vec{H}_1^1$  – суммарное вторичное поле в области  $D_0^{(1)}$ ,  $\vec{E}_0^1$ ,  $\vec{H}_0^1$  – вторичное поле, отраженное

от границы  $\Gamma_1$  в области  $D_0^{(1)}$ ,  $\vec{E}_1^1$ ,  $\vec{H}_1^1$  – вторичное поле, отраженное от границы  $S$  в области  $D_0^{(1)}$ .

Реальное электромагнитное поле определяется с помощью формул:

$$\vec{E}_j^k = \text{Re}(\vec{E}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$$\vec{H}_j^k = \text{Re}(\vec{H}_j^k e^{-i\omega t}),$$

$j = 0, 1$ ;  $k = 0, 1$ ;  $i$  – мнимая единица.

**Постановка задачи.** Требуется найти вторичные электромагнитные поля  $\vec{E}_j^k$ ,  $\vec{H}_j^k$ ,  $j = 0, 1$ ;  $k = 0, 1$ , которые удовлетворяют уравнению Максвелла [11], [16]:

$$\text{rot } \vec{E}_0^0 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0^0, \quad \text{rot } \vec{H}_0^0 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0^0 \quad \text{в } D_0^{(0)},$$

$$\text{rot } \vec{E}_0^1 = i\omega\mu_0 \vec{H}_0^1, \quad \text{rot } \vec{H}_0^1 = -i\omega\epsilon_0 \vec{E}_0^1 \quad \text{в } D_0^{(1)},$$

$$\text{rot } \vec{E}_1^0 = i\omega\mu_1 \vec{H}_1^0, \quad \text{rot } \vec{H}_1^0 = -i\omega\epsilon_1 \vec{E}_1^0 \quad \text{в } D_1,$$

граничному условию на поверхности идеально проводящей незамкнутой сферической оболочки  $\Gamma_1$

$$[\vec{n}, \vec{E}_0]_{\Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0]_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $\Gamma_1$ ,

граничным условиям на поверхности  $S$

$$[\vec{n}, \vec{E}_0]_S = [\vec{n}, \vec{E}_1^0]_S,$$

$$[\vec{n}, \vec{H}_0]_S = [\vec{n}, \vec{H}_1^0]_S, \quad (1.2)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $S$ ,

и условию излучения на бесконечности [11], [16]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial r} - ik_0 \vec{E}_0 \right) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial r} - ik_0 \vec{H}_0 \right) = 0, \quad (1.3)$$

где  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  – волновое число.

Потребуем также выполнения условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на открытой части сферы  $\Gamma \setminus \Gamma_1$

$$[\vec{n}, \vec{H}_e + \vec{H}_0^0]_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{H}_0]_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.4)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $\Gamma \setminus \Gamma_1$ ,

и условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на поверхности  $\Gamma_1$

$$[\vec{n}, \vec{E}_e + \vec{E}_0^0]_{\Gamma_1} = [\vec{n}, \vec{E}_0]_{\Gamma_1}, \quad (1.5)$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности  $\Gamma$ .

Первичное поле ориентированного вдоль оси  $Oz$  электрического диполя Герца представим через векторные сферические волновые функции [16]:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e &= E_0 \tilde{n}_{01}(r, \theta, k_0), \\ \vec{H}_e &= H_0 \tilde{m}_{01}(r, \theta, k_0),\end{aligned}\quad (1.6)$$

где  $E_0 = \frac{ik_0^3}{4\pi\epsilon_0} p$ ,  $H_0 = \frac{E_0 k_0}{i\omega\mu_0}$ ,  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  – электрический момент диполя,

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k) &= \frac{n(n+1)}{kr} h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + \\ &+ g_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta, \\ \tilde{m}_{0n}(r, \theta, k) &= -h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\varphi, \\ g_n^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x h_n^{(1)}(x)) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left( (n+1) h_{n-1}^{(1)}(x) - n h_{n+1}^{(1)}(x) \right), n=1, 2, \dots,\end{aligned}$$

$P_n(x)$  – полиномы Лежандра,  $P_n^1(\cos\theta)$  – присоединенные функции Лежандра первого рода,  $h_n^{(1)}(x)$  – сферические функции Ханкеля первого рода [17].

Вторичные поля представим в виде суперпозиции векторных сферических волновых функций, учитывая условие излучения на бесконечности (1.3)

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0), \\ \vec{H}_0 &= H_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \text{ в } D_0^{(0)},\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_0^1 &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0), \\ \vec{H}_0^1 &= H_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0) \text{ в } D_0^{(1)},\end{aligned}\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^0 &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_1), \\ \vec{H}_1^0 &= H_1 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_1) \text{ в } D_1,\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^1 &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \vec{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0), \\ \vec{H}_1^1 &= H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \vec{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) \text{ в } D_0^{(1)},\end{aligned}\quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{n}_{0n}(r, \theta, k) &= \frac{n(n+1)}{kr} j_n(kr) P_n(\cos\theta) \vec{e}_r + \\ &+ g_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\theta, \\ \vec{m}_{0n}(r, \theta, k) &= -j_n(kr) P_n^1(\cos\theta) \vec{e}_\varphi, \\ g_n(x) &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x j_n(x)) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left( (n+1) j_{n-1}(x) - n j_{n+1}(x) \right), n=1, 2, \dots,\end{aligned}$$

$k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ ,  $H_1 = \frac{k_1 E_0}{i\omega\mu_1}$ ,  $j_n(x)$  – сферическая функция Бесселя первого рода [17].

Неизвестные коэффициенты  $a_n, b_n, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$  определяются из граничных условий.

## 2 Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1.1), (1.4), (1.5) представим функции  $\vec{E}_1^1, \vec{H}_1^1$  через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O$ . Используем формулы [17]

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) &= \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \vec{n}_{0s}(r, \theta, k_0), 0 \leq r < h, \\ \tilde{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) &= \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi) \vec{m}_{0s}(r, \theta, k_0), 0 \leq r < h,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A}_s^n(k_0 h, \alpha) &= \\ &= k_0 h \cos\alpha \left[ \frac{1}{(2s+3)} \tilde{C}_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} \tilde{C}_{s-1}^n \right] + \tilde{C}_s^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_s^n &= (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_\sigma^{(n0s0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h) P_\sigma(\alpha), \\ b_\sigma^{(n0q0)} &= (nq00 | \sigma 0)^2,\end{aligned}$$

$(nq00 | \sigma 0)$  – коэффициенты Клебша-Гордона [11].

Тогда

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^1 &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \vec{n}_{0n}(r, \theta, k_0), \\ \vec{H}_1^1 &= H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \vec{m}_{0n}(r, \theta, k_0),\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\text{где } \tilde{B}_n = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{b}_s \tilde{A}_s^n(k_0 h, \pi). \quad (2.2)$$

Согласно представлениям (1.6)–(1.8), (2.1), условие непрерывности (1.5), с учетом условия ортогональности присоединенных функций Лежандра на отрезке  $[0; \pi]$ , примет вид

$$\begin{aligned}g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) a_n &= \\ &= g_n^{(1)}(\xi_0) b_n + g_n(\xi_0) \tilde{B}_n, n=1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где  $\delta_{1n}$  – символ Кронекера,  $\xi_0 = k_0 a$ .

Выполним граничное условие (1.1) на поверхности сферической оболочки  $\Gamma$  и условие непрерывности (1.4) и получим парные суммарные уравнения вида

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left( h_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + j_n(\xi_0) a_n - h_n^{(1)}(\xi_0) b_n - \right. \\ \left. - j_n(\xi_0) \tilde{B}_n \right) P_n^1(\cos\theta) = 0, 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_n^{(1)}(\xi_0) b_n + g_n(\xi_0) \tilde{B}_n \right) P_n^1(\cos\theta) = 0, \\ \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (2.4)$$

Преобразуем парные сумматорные уравнения (2.4). Сначала исключим коэффициенты  $a_n$  с помощью представления (2.3), учитывая значение вронскиана [11]

$$W[xj_n(x), xh_n^{(1)}(x)] = i.$$

Затем введем в рассмотрение новые коэффициенты  $X_n$  по формуле

$$X_n = \frac{b_n - \delta_{1n}}{\frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 j_n(\xi_0))}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

и малый параметр  $g_n$  по формуле

$$g_n = 1 + \frac{4i\xi_0}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 j_n(\xi_0)) \frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 h_n^{(1)}(\xi_0)),$$

$$g_n = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0.$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.4) примут вид:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} X_n P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(1-g_n) X_n P_n^1(\cos \theta) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) f_n P_n^1(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$f_n = 4i\xi_0^2 \frac{g_n^{(1)}(\xi_0) \delta_{1n} + g_n(\xi_0) \tilde{B}_n}{2n+1}. \quad (2.7)$$

Используя интегральные представления Мелера – Дирихле для полиномов Лежандра, парные сумматорные уравнения (2.6) преобразуем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода с вполне непрерывным оператором [13], [14], [18]

$$X_s (1 - g_s) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n Q_{sn}^{(1)} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Q_{sn}^{(1)}, \quad (2.8)$$

$$s = 1, 2, \dots,$$

$$Q_{sn}^{(1)} = Q_{sn} - \frac{Q_{s0} \cos(n+0,5)\theta_0}{\cos(0,5\theta_0)},$$

$$Q_{sn} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} + \frac{\sin(s+n+1)\theta_0}{s+n+1} \right],$$

$$\left. \frac{\sin(s-n)\theta_0}{s-n} \right|_{s=n} = \theta_0.$$

Выполним граничные условия (1.2). Для этого представим функции  $\tilde{E}_0^1$ ,  $\tilde{H}_0^1$  через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O_1$ . На основании формул [17]

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, 0) \tilde{n}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

$$\tilde{m}_{0n}(r, \theta, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s^n(k_0 h, 0) \tilde{m}_{0s}(r_1, \theta_1, k_0), \quad 0 \leq r_1 < h,$$

имеем

$$\tilde{E}_0^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tilde{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0),$$

$$\tilde{H}_0^1 = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tilde{m}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0), \quad (2.9)$$

где

$$B_n = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \tilde{A}_s^n(k_0 h, 0). \quad (2.10)$$

Выполняя граничные условия (1.2) и принимая во внимание представления (1.9), (1.10), (2.9), получим

$$\begin{cases} g_n(\xi_1^1) \tilde{a}_n - g_n^{(1)}(\xi_0^1) \tilde{b}_n = g_n(\xi_0^1) B_n, \\ \frac{H_1}{H_0} j_n(\xi_1^1) \tilde{a}_n - h_n^{(1)}(\xi_0^1) \tilde{b}_n = j_n(\xi_0^1) B_n, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $\xi_0^1 = k_0 a_1$ ,  $\xi_1^1 = k_1 a_1$ .

Из системы (2.11) находим связь между коэффициентами  $\tilde{b}_n$  и  $B_n$

$$\tilde{b}_n = \beta_n B_n, \quad \beta_n = \frac{\Delta_2(n)}{\Delta(n)}, \quad (2.12)$$

где

$$\Delta(n) = \frac{H_1 g_n^{(1)}(\xi_0^1) j_n(\xi_1^1)}{H_0} - g_n(\xi_1^1) h_n^{(1)}(\xi_0^1),$$

$$\Delta_2(n) = g_n(\xi_1^1) j_n(\xi_0^1) - \frac{H_1 g_n(\xi_0^1) j_n(\xi_1^1)}{H_0}.$$

Теперь преобразуем правую часть системы (2.8). Для этого подставим в (2.2) представление (2.12) для коэффициентов  $\tilde{b}_n$  и, учитывая связь коэффициентов  $B_n$  с коэффициентами  $X_n$  (представления (2.10) и (2.5)), получим

$$\tilde{B}_n = \sum_{p=1}^{\infty} X_p \frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 j_p(\xi_0)) \alpha_n^p + \alpha_n^1, \quad (2.13)$$

где  $\alpha_n^p = \sum_{q=1}^{\infty} \beta_q \tilde{A}_q^p(k_0 h, 0) \tilde{A}_n^q(k_0 h, \pi)$ .

Подставляя коэффициенты  $\tilde{B}_n$  из (2.13) в (2.7), окончательно получим бесконечную СЛАУ второго рода с вполне непрерывным оператором:

$$X_s (1 - g_s) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n Q_{sn}^{(1)} - \gamma_{sn}) X_n = \tilde{f}_s + \tilde{f}_s^*, \quad (2.14)$$

$$s = 1, 2, \dots,$$

где

$$\gamma_{sn} = 4i\xi_0^2 \frac{d}{d\xi_0}(\xi_0 j_n(\xi_0)) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \alpha_p^n g_p(\xi_0) Q_{sp}^{(1)},$$

$$\tilde{f}_s = \frac{4i\xi_0^2}{3} g_1^{(1)}(\xi_0) Q_{s1}^{(1)},$$

$$\tilde{f}_s = 4i\xi_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} Q_{sp}^{(1)} g_p(\xi_0) \alpha_p^1.$$

### 3 Диаграмма направленности электромагнитного поля

Представим функцию  $\bar{E}_1^1$  через векторные сферические волновые функции в системе координат с началом в точке  $O$ . Используя формулу [16]

$$\tilde{n}_{0n}(r_1, \theta_1, k_0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^n(k_0 h, \pi) \tilde{n}_{0s}(r, \theta, k_0), \quad r > h,$$

где

$$\begin{aligned} A_s^n(k_0 h, \pi) &= \\ &= -k_0 h_0 \left[ \frac{1}{(2s+3)} C_{s+1}^n + \frac{1}{(2s-1)} C_{s-1}^n \right] + C_s^n, \\ C_s^n &= (2s+1) \sum_{\sigma=|s-n|}^{s+n} i^{\sigma+s-n} b_{\sigma}^{(n0s0)} j_{\sigma}(k_0 h) P_{\sigma}(\cos \pi). \end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{E}_1^1 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{b}_s A_s^n(k_0 h, \pi) \right) \tilde{n}_{0n}(r, \theta, k_0). \quad (3.1)$$

Подставим асимптотическую формулу

$$\tilde{n}_{0n}(r, \theta, k) \approx (-i)^n \frac{e^{ikr}}{kr} P_n^1(\cos \theta) \bar{e}_{\theta}$$

при  $r \rightarrow \infty$

в представлении (1.8), (3.1) для векторов  $\bar{E}_0^1$   $\bar{E}_1^1$  и получим асимптотическое представление для вектора  $\bar{E}_0$

$$\bar{E}_0 \approx E_0 \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} \Psi(\theta) \bar{e}_{\theta}, \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left( b_n + \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{b}_s A_s^n(k_0 h, \pi) \right) P_n^1(\cos \theta).$$

Величина  $D(\theta) = |\Psi(\theta)|^2$  называется диаграммой направленности электрического поля  $\bar{E}_1^1$ , которая характеризует величину электромагнитной энергии в направлении  $\theta$  [16].

Используя представления (2.10), (2.12), устанавливаем, что

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left( b_n + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \tilde{\alpha}_n^p \right) P_n^1(\cos \theta), \quad (3.2)$$

где  $\tilde{\alpha}_n^p = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \tilde{A}_s^p(k_0 h, 0) A_s^n(k_0 h, \pi)$ .

Коэффициенты  $b_n$  связаны с решением системы (2.8) соотношением

$$b_n = X_n \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0 j_n(\xi_0)) + \delta_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

### 4 Вычислительный эксперимент

Используя систему компьютерной математики Mathcad [19], были проведены вычисления диаграммы направленности для некоторых параметров задачи.

Специальные функции

$$j_n(x), \quad h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$$

( $y_n(x)$  – сферическая функция Бесселя второго рода), полиномы Лежандра  $P_n(x)$  и присоединенная функция Лежандра

$$\begin{aligned} P_n^1(\cos \theta) &= -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n(x) = \\ &= \frac{nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

вычислялись с помощью встроенных функций [19].

Производные сферических функций вычислялись с помощью рекуррентных формул [17]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_n(x) &= \frac{nf_n(x)}{x} - f_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{d}{dx} (xf_n(x)) &= \frac{x}{2n+1} ((n+1)f_{n-1}(x) - nf_{n+1}(x)), \\ &n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Бесконечная система (2.14) решена методом усечения [11]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо было проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [20, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовали встроенные функции cond1 (число обусловленности в норме  $L_1$  [21]), cond2 (в норме  $L_2$ ) и conde (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 25. Это обеспечивает решение конечной системы (2.14) с точностью  $10^{-4}$  и число обусловленности в рассматриваемых нормах не будет превосходить 75. Все сходящиеся бесконечные суммы в (2.14) вычислялись с точностью  $10^{-5}$ .

На рисунке 3.1 изображены графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  электрического поля  $\bar{E}_1^1$  для некоторых значений угла раствора  $\theta_0$  незамкнутой сферической оболочки  $\Gamma_1$  ( $1 - 30^\circ$ ,  $2 - 60^\circ$ ,  $3 - 90^\circ$ ,  $4 - 120^\circ$ ), если область  $D_1$  заполнена бетоном (относительная магнитная проницаемость  $\mu_{r1} = 1$ , относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{r1} = 4, 5$ ),  $a = 1$  м,  $a_1 = 2$  м,  $h = 4$  м,  $f = 10^8$  Гц,  $\omega = 2\pi f$ . При расчетах полагали  $\mu_{r0} = 1$ ,  $\varepsilon_{r0} = 1$ .

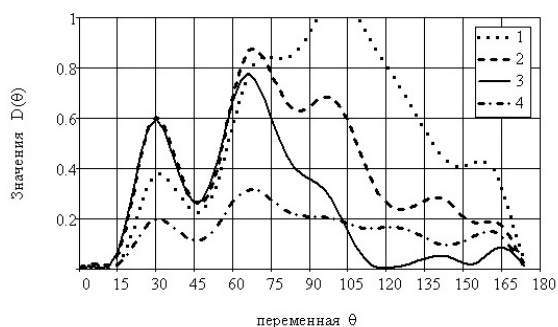


Рисунок 3.1 – Графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  для некоторых значений угла раствора  $\theta_0$  сферической оболочки  $\Gamma_1$

На рисунке 3.2 изображены графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  электрического поля  $\vec{E}_1$ , если область  $D_1$  заполнена тефлоном ( $\mu_{r1}=1$ ,  $\varepsilon_{r1}=2,1$ ), бетоном ( $\mu_{r1}=1$ ,  $\varepsilon_{r1}=4,5$ ), стеклом ( $\mu_{r1}=0,999987$ ,  $\varepsilon_{r1}=7,5$ ), водой ( $\mu_{r1}=1$ ,  $\varepsilon_{r1}=81$ ),  $a=1$  м,  $a_1=1,5$  м,  $h=3$  м,  $\theta_0=90^\circ$ ,  $f=10^8$  Гц,  $\omega=2\pi f$ .

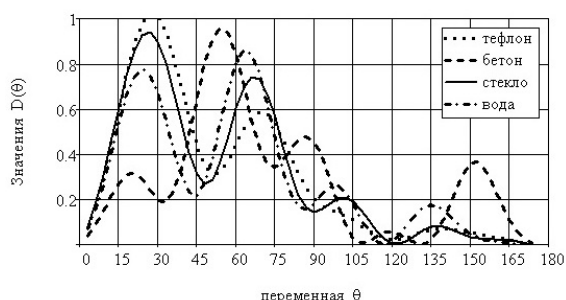


Рисунок 3.2 – Графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  в случае заполнения области  $D_1$  различными веществами

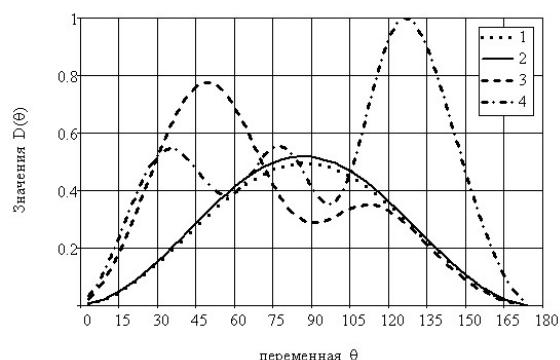


Рисунок 3.3 – Графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  для некоторых значений частоты  $f$  исходного поля

На рисунке 3.3 изображены графики диаграммы направленности  $D(\theta)$  электрического

поля  $\vec{E}_1$  для различных значений частоты исходного поля (1 –  $f=10^5$  Гц, 2 –  $f=10^7$  Гц, 3 –  $f=5 \cdot 10^7$  Гц, 4 –  $f=8 \cdot 10^7$  Гц), если область  $D_1$  заполнена стеклом ( $\mu_{r1}=0,999987$ ,  $\varepsilon_{r1}=7,5$ ),  $a=1,5$  м,  $a_1=1$  м,  $h=3,3$  м,  $\theta_0=60^\circ$ .

### Заключение

Построено точное осесимметричное решение задачи о рассеянии электромагнитного поля на идеально проводящей бесконечно тонкой незамкнутой сферической оболочке и проникаемом шаре. В качестве источника поля рассмотрен электрический диполь, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Используя теоремы сложения для векторных сферических волновых функций, решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по присоединенным функциям Лежандра первого рода. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Численно исследовано влияние некоторых геометрических параметров задачи, диэлектрической и магнитной проницаемости сред, частоты источника поля на диаграмму направленности электрического поля.

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при моделировании рассеяния электромагнитного поля на системе тел.

### ЛИТЕРАТУРА

1. 9-й Международный симпозиум и выставка по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://old.eltech.ru/conference/emc/2011/rus/main.htm>. – Дата доступа: 17.10.2014.
2. Международная научная конференция «Излучение и рассеяние электромагнитных волн» ИРЭМВ-2013 // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://rtf.tti.sfedu.ru/airpu/rsemw/>. – Дата доступа: 17.10.2014.
3. Международный симпозиум по электромагнитной совместимости EMC Europe 2014 // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.emceurope2014.org/> – Дата доступа: 20.10.2014.
4. The 3rd Advanced Electromagnetic Symposium AES 2014 // [Electronic resource]. – Режим доступа: <http://mysymposia.org/aes2014/index.php>. – Дата доступа: 20.10.2014.
5. Панченко, Б.А. Рассеяние и поглощение электромагнитных волн неоднородными сферическими телами / Б.А. Панченко. – М.: Радиотехника, 2013. – 264 с.
6. Кравченко, В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур / В.Ф. Кравченко. – М.: Физматлит, 2006. – 280 с.

7. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г.Свешников. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
8. Шебеко, Г.А. Дифракция электромагнитного поля элементарного электрического диполя на двух сферах / Г.А. Шебеко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1967. – № 2. – С. 72–79.
9. Кравченко, В.Ф. Дифракция электромагнитных волн на двух сверхпроводящих полых сферических оболочках / В.Ф. Кравченко, В.Т. Ерофеев, В.И. Пустовойт // ДАН. – 1994. – Т.339, № 2. – С. 166–170.
10. Козлов, И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух сферах / И.П. Козлов // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. – 1975. – Т. XVIII, № 7. – С. 998–1008.
11. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
12. Виноградов, С.С. Дифракция поля вертикального диполя на сферическом сегменте / С.С. Виноградов, А.М. Радин, В.П. Шестопалов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 8. – С. 741–745.
13. Свищёв, Ю.В. Поле вертикального магнитного диполя при наличии сферы с круговым отверстием / Ю.В. Свищёв // Изв. вуз. Радиофизика. – 2000. – Т. XLIII, № 9. – С. 773–781.
14. Свищёв, Ю.В. Несимметричные электромагнитные колебания в сфере с круговым отверстием / Ю.В. Свищёв // Изв. вуз. Радиофизика. – 2006. – Т. XLIX, № 4. – С. 336–347.
15. Морозов, В.А. Рэлеевский случай дифракции плоской волны на сфере с круговой щелью / В.А. Морозов, Н.В. Родионова // ЖТФ. – 1978. – Т. 48, вып. 10. – С. 1993–2000.
16. Ерофеев, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике. – Мн.: БГУ, 2010. – 303 с.
17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
18. Ерофеев, В.Т. Экранирование низкочастотного электрического поля многослойным круговым диском / В.Т. Ерофеев, Г.Ч. Шушкевич // ЖТФ. – 2013. – Т. 83, вып. 6. – С. 92–97.
19. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.
20. Петров, Ю. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.
21. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.

Поступила в редакцию 06.11.14.